Проектирование многоуровневой системы задач при изучении и повторении квадратных уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств с параметром

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.	***ФИО (полностью)***	Бокова Елена Владимировна
2.	***Место работы***	Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение Самарской области средняя общеобразовательная школа №10 «Образовательный центр ЛИК» городского округа Отрадный Самарской области
3.	***Должность***	учитель математики
4.	***Предмет***	алгебра
5.	***Класс***	8-9, 10 (элективный курс «Решение уравнений и неравенств с параметром»), 11 (задание №18 ЕГЭ по математике).

6. ***Цель:*** обучение умению решать квадратные уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств с параметром различными способами.

7. ***Задачи:***

- ***обучающие:*** анализировать и осмысливать текст задачи, самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели, переформулировать условие, строить логическую цепочку рассуждений, критически оценивать полученный ответ, осознанное и произвольное построение речевого высказывания, выбор наиболее эффективного способа решения задач, постановка и формулирование проблемы, выдвижение гипотез и их обоснование, смысловое чтение;

-***развивающие:*** целеполагание, планировать свою деятельность в зависимости от конкретных условий; рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности, саморегуляция, через решение задач, развивать творческую и мыслительную деятельность учащихся, интеллектуальные качества: способность к “видению” проблемы, оценочным действиям, самостоятельности, гибкости мышления;

-***воспитательные:*** смыслообразование, умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, воспитывать ответственность и аккуратность.

Задачи с параметром традиционно и заслуженно считаются наиболее трудными:

а) нехватка времени на них в школьной программе;

б) исследовательский характер;

в) умение решать классические задачи без параметра, умение всесторонне исследовать квадратный трехчлен.

Выбор задачи с параметром для обучения их решению и конструированию, можно объяснить следующими обстоятельствами:

- при решении задач с параметром происходит повторение, и как следствие, более глубокое, прочное усвоение программных вопросов;
- решение задач с параметром расширяет математический кругозор, дает новые подходы к решению задач;
- происходит развитие математического, логического мышления, умение анализировать, сравнивать, обобщать;
- приобретаются навыки к исследовательским работам;
- происходит формирование таких качеств личности, как трудолюбие, целеустремленность, усидчивость, сила воли, точность.

Формируемые УУД в рамках ФГОС при решении задач с параметром:

№	Этапы решения задач	Формируемые УУД
1.	Анализ условия *(введение буквенных обозначений)*	– целеполагание; – выделение существенной информации; – формулирование задачи и прогнозирование способов решения; – абстрагирование; – аналогия; – классификация (типологизация); – знакосимволические действия.
2.	Схематическая запись условия задачи в виде таблицы, схемы, графа *с введенными буквенными обозначениями*	– планирование; – систематизация; – знакосимволические действия; – моделирование.
3.	Составление модели *(поиск аналога, привлечение из математики или физики известного закона)*	– создание способа решения залачи; – корректировка условия; – моделирование в графическом виде.
4.	Решение уравнения, системы и т.д. *(поиск неизвестного)*	– анализ и выявление существенной информации; – выведение следствий; – построение цепи рассуждений; – выдвижение и проверка гипотез; – преобразование модели.
5.	Интерпретация модели *(проверка и оценка решений, корней)*	– анализ; – выведение следствий; – конкретизация; – знакосимволическое действие (интерпретация).
6.	Исследование *(обобщение задачи или способа её решения для видоизмененных условий, другие подходы к решению)*	– анализ; – синтез; – поиск аналогов; – построение цепи рассуждений; – умение сжато передать содержание; – умение схемы, символы, модели;

		– создание способов решения проблем поискового, творческого характера.
7.	Рефлексия	– смыслообразование; – планирование; – контроль; – коррекция; – оценка; – волевая саморегуляция; – готовность к саморазвитию, к самообразованию; – умение самостоятельно определять цели своего обучения; – ставить и формулировать для себя новые задачи; – развивать мотивы и интересы своей образовательной деятельности.

Решение квадратных уравнений с параметром

Параметр – величина, характеризующая какое-нибудь основное свойство устройства, системы. «Словарь русского языка» С.И. Ожегова.

Параметр – постоянная величина, выраженная буквой, сохраняющая свое постоянное значение лишь в условиях данной задачи. «Словарь иностранных слов».

Параметр – это величина, входящая в математическую формулу и сохраняющая постоянное значение в пределах одного явления или для данной частной задачи, но при переходе к другому явлению или другой задаче меняющая свое значение. «Толковый словарь русского языка» под редакцией Д.Н. Ушакова.

Решить уравнение с параметром – это значит: определить, при каких значениях параметров уравнение не имеет решений, при каких – имеет, и для каждого из тех наборов значений параметров, при которых уравнение имеет решения, найти их.

Нельзя научиться решать любые задачи с параметром, используя какой-то алгоритм или формулы. При решении задач с параметром надо всегда активно использовать соображения, исходящие из здравого смысла, рассматривать их как задачи исследовательские.

При решении таких уравнений необходимо использовать следующие сведения.

1. Зависимость количества корней квадратного уравнения от его дискриминанта.

$D > 0$ (2 корня); $D = 0$ (1 корень); $D < 0$ (нет корней).

2. Если $D> 0$ то $ax^2 + bx + c = a (x – x_1) (x – x_2)$

3. Если $D> 0$, то левую часть можно представить в виде полного квадрата или выражения, ему противоположного $ax^2 + bx + c = a (x – x_1)^2$

4. Если уравнение приведенное то $x_1 + x_2 = – p$, $x_1 \bullet x_2 = q$

5. Если $a> 0$, $D> 0$, то уравнение имеет два действительных различных корня:

а) $в < 0$, $c > 0$ оба корня положительны

б) $в > 0$, $c > 0$ оба корня отрицательны

в) $в < 0$, $c < 0$ корни противоположны по знаку. Положителен тот корень, который имеет больший модуль.

г) в > 0, с < 0 корни противоположны по знаку. Отрицателен тот корень, который имеет больший модуль.

Вид задачи	Квадратные уравнения	Квадратные неравенства
Базовая	Задача №1. Решить уравнение $x^2 – bx + 4 = 0$ Решение $D = b^2 – 16$. а) если $\lvert b\rvert > 4$, т.е. $b < – 4$ и $b > 4$ (b € $(– ∞; 4)U(4; + ∞)$, то $D >0$ и уравнение имеет 2 корня $x_{1,2} = \frac{b\pm\sqrt{b^2-16}}{2}$ б) если $\lvert b\rvert = 4$, т.е. $b = \pm 4$, то $D = 0$, уравнение имеет один корень $x = b/2$ в) если $\lvert b\rvert < 4$, т.е. $– 4 < b < 4$, то $D < 0$ и уравнение корней не имеет. Ответ: если $b < – 4$ и $b > 4$, то 2 корня: $x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-16}}{2}$, если $b = \pm 4$, то 1 корень: $x = b/2$, если $– 4 < b < 4$, то корней нет.	Задача №1. Решить неравенство $x^2 + 2x + a > 0$. Решение Это неравенство легко решить графически. Для этого представим его в виде $x^2 + 2x > - a$ и построим график функции $y = x^2 + 2x$ и $y = -a$ Абсциссы точек пересечения этого графика с прямой $y = - a$ и являются корнями уравнения $x^2 + 2x = - a$. Ответ: при $–a > - 1$, т.е. x € $(- ∞; x1)$ U $(x2;+ ∞)$; при $– a = - 1$, т.е. при $a = 1$, x – любое действительное число, кроме - 1; при $a > 1$, x – любое действительное число. Задача№2 При каких значениях параметра p квадратное уравнение $3x^2 – 2px –p + 6 = 0$ имеет два различных корня. Решение: Квадратное уравнение имеет два различных корня, если $D >0$. Найду дискриминант. $\frac{D}{4} = p^2- 3(-p+6) =p^2+3p-18$. $D >0$, значит $p^2+3p-18>0$. По теореме Виета $p_1=3$, $p_2= - 6$. Отмечу найденные точки на координатной прямой и определю знак в каждом промежутке.  $p < -6$ и $p>3$. Ответ: при $p < -6$ и $p>3$ квадратное уравнение $3x^2 – 2px –p + 6 = 0$ имеет два различных корня.
Модифицированная	Задача №1. При каких значениях параметра, а квадратное уравнение $x^2 - 2ax + 2a^2 - 1 = 0$ не имеет действительных корней Решение: Квадратное уравнение не имеет действительных корней, если $D<0$. Найду дискриминант.	Задача №1. При каких значениях параметра p неравенство $x^2 + 2px + 2p + 3 > 0$ верно для любого значения x? Решение: Рассмотрим функцию $y = x^2 + 2px + 2p + 3$ Графиком является парабола так как ветви параболы $y = x^2 + 2px + 2p + 3$ направлены вверх, то условие задачи будет равносильно условию $D/4 < 0$. Решая данное неравенство, получаем:

	$x^2-2a\cdot x+2a^2-1=0$ $\frac{D}{4}=1-a^2<0:$ $a^2>1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a>1\\a<-1\end{array}\right.$ <u>Ответ:</u> если, a>1 и a<-1, то уравнение не имеет действительных корней. <u>Задача №2.</u> При каких значениях параметра а уравнение ах (ах + 3) + 6 = х (ах – 6) является: а) квадратным б) неполным квадратным в) линейным <u>Решение</u> Выполним преобразования: $a^2x^2 + 3ax + 6 = ax^2 - 6x$ $a^2x^2 - ax^2 + 3ax + 6x + 6 = 0$ $a(a - 1)x^2 + 3(a + 2)x + 6 = 0$ а) уравнение квадратное, если старший коэффициент $\neq 0$. значит $a(a - 1) \neq 0$ $a \neq 0$, $a \neq 1$ т.е. уравнение квадратное при всех а, кроме 0 и 1 б) неполное квадратное, если b = 0; если c = 0; если b = 0 и c = 0. Значит: $3(a + 2) = 0$ $a = -2$ в) линейное, если коэффициент при x^2 равен 0, значит $a(a - 2) = 0$ а = 0 или а=2 <u>Ответ:</u> при а неравном 0 и 1 уравнение квадратное при а = – 2 неполное квадратное при а = 0 или а = 2 - линейное.	$p^2-2p-3<0$, $-1<p<3$. <u>Ответ:</u> При $-1<p<3$ неравенство $x^2+2px+2p+3>0$ верно для любого значения *x*?
Исследовательская	<u>Задача №1.</u> При каких значениях b уравнения $x + y = b$ и $x^2 + y^2 = 9$ имеют единственное решение? <u>Решение:</u> Переформулируем задачу. При каких значениях b система уравнений $x + y = b$ и $x^2 + y^2 = 9$ имеет единственное решение? Составим систему: $\begin{cases}x^2+y^2=9\\x+y=b\end{cases}$	<u>Задача №1.</u> Найти наибольшее целое значение параметра *t*, для которого выполняется неравенство: $(1 - t)x^2 + 3x - t - 1 > 0$. <u>Решение:</u> В левой части неравенства квадратный трехчлен, который будет всегда положительным при ветвях параболы, направленных вверх (т.е. $1 – t > 0$ или $t < 1$) и отрицательном дискриминанте:

Выразив y через x из второго уравнения и подставив его в первое уравнение, получим:

$$\begin{cases} x^2+(b-x)^2=9 \\ y=b-x \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда дискриминант первого уравнения $2x^2-2bx+b^2-9=0$ р авен нулю, то есть когда $b^2-2b^2+18=0$, $b=\pm3\sqrt{2}$.

<u>Ответ:</u>

При $b_{1,2}=\pm3\sqrt{2}$ уравнения $x + y = b$ и $x^2 + y^2 = 9$ имеют единственное решение?

<u>Задача №2.</u>

Найдите все значения параметра a, при которых парабола $y=x^2-3x+3a$ и прямая $y=x+2(y-2)$ не имеют общих точек.

<u>Решение:</u>

Парабола и прямая не имеют общих точек, если они не пересекаются, а значит

$$x^2-3x+3a\neq x+2(a-2)\Rightarrow$$

$$x^2-4x+a+4\neq 0$$

Уравнение не имеет корней, когда $D<0\Rightarrow 16-4a-16<0\Rightarrow a>0$

<u>Ответ:</u>

при $a>0$ парабола и прямая не имеют общих точек.

<u>Задача №3.</u>

Найти все значения параметра a, при каждом из которых либо число корней уравнения

$$\frac{3a+5-(2a-5)x}{x-1}=a^2+2a$$ равно

числу корней уравнения $(3a+5)x^2+3ax-9=0$, либо оба эти уравнения не имеют решений.

Решение:

Так как уравнение

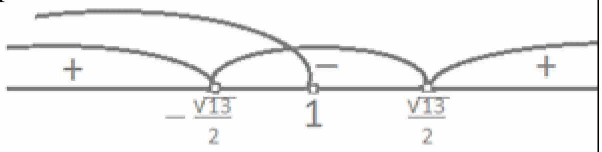
$$\frac{3a+5-(2a-5)x}{x-1}=a^2+2a$$

является линейным, то у него может быть либо: один корень, бесчисленное множество корней или вообще не имеет решений, в зависимости от параметра a, а

$D=9+4(1-t)(t+1)<0,\quad D=13-4t^2=-4\left(t^2-\frac{13}{4}\right)<0.$

$$\begin{cases} t<1 \\ 4\left(t-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)>0 \end{cases}$$

Изобразим решения системы на числовой прямой:



Все решения неравенства:

$$t\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{13}}{2}\right).$$

Наибольшее целое число -2, т.к. $-\frac{\sqrt{13}}{2}\approx-1,8$

<u>Ответ:</u>

при t= - 2 выполняется неравенство

$(1 - t)x^2 + 3x - t - 1 > 0$.

	квадратное уравнение $(3a+5)x^2+3ax-9=0$ может иметь: один корень, два корня или не имеет решений, также в зависимости от параметра *a*. Исходя из этого нам нужно найти такие значения параметра *a*, при которых оба эти уравнения имеют один корень, либо не имеют решений. Рассмотрим уравнение $(3a+5)x^2+3ax-9=0$ 1. Если $a=-\frac{5}{3}$, то $x=-\frac{9}{5}$, то есть один корень; посмотрим сколько корней имеет уравнение $\frac{3a+5-(2a-5)x}{x-1}=a^2+2a$, при $a=-\frac{5}{3}$, мы видим, что оно также имеет один корень $x=\frac{1}{16}$. Следовательно $a=-\frac{5}{3}$ удовлетворяет условию задачи. 2. Если $a\neq-\frac{5}{3}$. Нам нужно найти такие значения параметра *a*, при которых уравнение $(3a+5)x^2+3ax-9=0$ не имеет решений, следовательно D<0. $D=9a^2+36(3a+5)<0 \Rightarrow a\in(-10;-2)$ Преобразуем теперь уравнение $\frac{3a+5-(2a-5)x}{x-1}=a^2+2a$, имеем $x=\frac{a^2+5a+5}{(a+5)(a-1)}$. При $a=-5$ и $a=1$, уравнение не имеет решений. Объединяя оба этих решения, получаем, что при $a=-5$, оба уравнения не будут иметь решения. 3.Найдем теперь такие значения параметра *a*, при которых уравнения $\frac{3a+5-(2a-5)x}{x-1}=a^2+2a$ и $(3a+5)x^2+3ax-9=0$ имеют одно решение.	

	Чтобы уравнение $(3a+5)x^2+3ax-9=0$ имело один корень, нужно чтобы D=0, то есть $a=-10; a=-2$. Проверим, будет ли при этих значениях параметра a, уравнение $\frac{3a+5-(2a-5)x}{x-1}=a^2+2a$ иметь один корень. $a=-10$, тогда подставим и видим, что $x=1$, но такого не может быть, так как знаменатель исходного линейного уравнения обратится в нуль. $a=-2$, тогда подставим и видим, что $x=\frac{1}{9}$, то есть $a=-2$ - удовлетворяет условию задачи. Ответ: при $a=-\frac{5}{3}; a=-2; a=-5.$ либо число корней уравнения $\frac{3a+5-(2a-5)x}{x-1}=a^2+2a$ равно числу корней уравнения $(3a+5)x^2+3ax-9=0$, либо оба эти уравнения не имеют решений.	

Задачи для самостоятельного решения

1) Решите относительно x уравнение:

а) $mx^2 – 6x + 1 = 0$;

б) $ax^2 = 4$;

в) $x^2 – ax = 0$;

г) $x^2 – 2x = c$;

д) $6x^2 – 5bx + b2 = 0$;

е) $12x^2 + 7cx + c2 = 0$.

2) Решите относительно y уравнение:

а) $cy^2 + 8 = 2y^2 + 4c$;

б) $b (y^2 + 7) = b (y + 5) + 2b$;

в) $y^2 – 3y = a^2 + 3a$;

г) $ay^2 + 6y + a = 3 (2y – a)$.

3) При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 – 4x + a = 0$ имеет:

а) положительные корни;

б) отрицательные корни;

в) корень, равный нулю;

г) единственный корень, отличный от нуля?

4) При каких значениях параметра а неравенство $2a(a - 2)x < a - 2$ не имеет решений? (Ответ 0; 2)

5)При каких значениях параметра а неравенство $x^2 - (a + 2)x + 8a + 1 > 0$ выполняется для всех значений х? (Ответ (0; 28))

6) При каких значениях параметра а неравенство $-x^2 + ax - 1 > 0$ имеет только положительные решения? (Ответ $(2;\infty)$.